

УДК 378.147

Л. І. Мещеряков,

д. т. н., професор, професор кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем,
НТУ Дніпровська політехнікаORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9579-1970>

Н. П. Уланова,

к. т. н., доцент, доцент кафедри прикладної математики,
НТУ Дніпровська політехнікаORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-8460-5266>

В. В. Приходько,

к. т. н., доцент, доцент кафедри прикладної математики,
НТУ Дніпровська політехнікаORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5669-5927>

DOI: 10.32702/2306-6792.2025.22.51

ЗАСТОСУВАННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ РОЗДІЛІВ МАТЕМАТИКИ У ФОРМУВАННІ ФАХОВИХ КОМПЕТЕНЦІЙ ПРИКЛАДНИХ МАТЕМАТИКІВ

L. Meshcheryakov,

Doctor of Engineering Sciences, Professor, Professor of the Department
of Computer Systems Software, Dnipro University of Technology

N. Ulanova,

PhD in Technical Sciences, Associate Professor,

Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Dnipro University of Technology

V. Prykhodko,

PhD in Technical Sciences, Associate Professor,

Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Dnipro University of Technology

APPLICATION OF SPECIAL SECTIONS OF MATHEMATICS IN THE FORMATION OF PROFESSIONAL COMPETENCES OF APPLIED MATHEMATICIANS

Стаття присвячена дослідженню проблеми вдосконалення змісту спеціальних розділів математики в процесі професійної підготовки майбутніх фахівців з прикладної математики. Необхідність модернізації математичної складової професійної освіти зумовлена зростаючою роллю прикладних аналітичних методів та комп'ютерного моделювання у розв'язанні реальних наукових і технічних завдань. У дослідженні здійснено детальний аналіз взаємозв'язків між спеціальними математичними курсами та професійно орієнтованими дисциплінами, наголошено на важливості забезпечення їх системної та логічної інтеграції.

У роботі окреслено основні напрями підвищення ефективності вивчення вказаних дисциплін. Особливу увагу приділено доцільності включення до навчальних матеріалів професійно орієнтованих прикладних завдань, оскільки саме вони допомагають здобувачам освіти глибше усвідомити практичну цінність математичних понять і методів. Стаття містить декілька прикладних задач, що передбачають побудову відповідних математичних моделей, вибір аналітичних або чисельних методів розв'язання та інтерпретацію отриманих результатів. Варто відмітити, що такий підхід сприяє розвитку критичного мислення, формуванню вмінь ефективно застосовувати математичний апарат та обґрунтовувати правильність професійних рішень.

Результати проведеного дослідження свідчать про те, що запропонована методична система сприяє формуванню високого рівня професійної компетентності, підвищує мотивацію до самостійного навчання та забезпечує готовність випускників до науково-дослідної і виробничої діяльності. У дослідженні підкреслено міждисциплінарний характер прикладної математики та показано, що інтеграція математичного моделювання, інформаційних технологій і професійних дисциплін забезпечує стійкі освітні результати. Зроблено висновок, що систематичне впровадження запропонованого підходу може стати ефективною стратегією підвищення якості математичної підготовки та її відповідності сучасним вимогам прикладної науки і техніки.

The article is devoted to the study of the problem of improving the content of special sections of mathematics in the process of professional training of future specialists in applied mathematics. The need to modernize the mathematical component of professional education is substantiated by the growing role of applied analytical methods and computer modeling in solving real scientific and engineering problems. The study provides a detailed analysis of the relationships between special mathematical courses and professionally oriented disciplines and emphasizes the importance of ensuring their systematic and logical integration.

The research outlines the main directions for increasing the efficiency of studying these disciplines. Particular attention is paid to the expediency of including professionally oriented applied tasks in the content of training, since such tasks help students better understand the practical value of mathematical concepts and methods. Examples of applied problems are given, including the construction of appropriate mathematical models, the choice of analytical or numerical solution methods, and the interpretation of the obtained results. It is emphasized that such an approach develops students' ability to think critically, use mathematical tools effectively, and justify the correctness of their professional decisions.

The results of the conducted study show that the proposed methodological system contributes to the formation of a high level of professional competence, increases motivation for independent learning, and ensures the readiness of graduates for research and production activities. The study highlights the interdisciplinary nature of applied mathematics and demonstrates that the integration of mathematical modeling, information technologies, and professional disciplines provides sustainable educational outcomes. The conclusions confirm that systematic implementation of the proposed approach can become an effective strategy for improving the quality of mathematical training and for aligning it with the modern requirements of applied science and technology.

Ключові слова: прикладна спрямованість задач, математична модель, теорія функцій комплексної змінної, перетворення Лапласа, перетворення Фур'є, інтегральні рівняння.

Keywords: applied problem orientation, mathematical model, theory of functions of a complex variable, Laplace transform, Fourier transform, integral equations.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ ТА ЇЇ ЗВ'ЯЗОК ІЗ ВАЖЛИВИМИ НАУКОВИМИ ЧИ ПРАКТИЧНИМИ ЗАВДАННЯМИ

Сучасний розвиток науки і технологій передбачає суттєві зміни у підготовці майбутніх спеціалістів, пов'язані з формуванням їхніх професійних компетенцій, розвитком навичок неперервного навчання, здатністю до збору, обробки і оцінювання інформації, вмінням приймати неординарні рішення і втілювати їх в своїй професійній діяльності. Такі зміни обумовлюють узгодження освітніх програм спеціалістів з прикладної математики із вимогами ринку праці та потребами працедавців, запитамі суспільства та інтересами здобувачів освіти.

Специфіка роботи майбутніх спеціалістів з прикладної математики потребує від них поєднання глибоких математичних знань з умінням застосовувати їх для розв'язання конкретних завдань в різноманітних областях, таких як інженерія, економіка, фінанси, медицина тощо. Розробка моделей для опису реальних про-

цесів, створення алгоритмів для розрахунків, які неможливо отримати аналітичним шляхом, питання оптимізації, аналізу даних — це тільки невеликий перелік напрямів, за якими працюють випускники спеціальності "Прикладна математика". Використання математичних методів, а при необхідності й модифікація існуючих під нові задачі, можливе лише за умови відповідного рівня математичної підготовки, оскільки без розуміння основ будь-які розв'язки будуть поверхневими, а інтерпретація результатів — мати високий ризик помилок.

Математична освіта сприяє успішному засвоєнню не тільки фундаментальних дисциплін, вона є загальнонауковим фундаментом для успішного оволодіння фаховими знаннями. Це означає, що в процесі навчання студенти повинні виконувати навчальну діяльність, яка моделює їх майбутню професійну діяльність [1]. Разом з тим ефективність навчання багато в чому залежить від якості викладання матеріалу, здатності викладача мотивувати студентів через прикладні задачі, застосовувати сучасні

методи навчання. Творчий підхід і ефективність педагогічної роботи професорсько-викладацького складу дозволяє не тільки допомагати студенту отримувати професійну підготовку, а й домогтися переходу отриманих знань на рівень компетенцій [2].

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Формування спеціаліста з прикладної математики з творчим мисленням та креативною індивідуальністю є пріоритетом сучасної інженерної освіти. В своїй роботі К.М. Стрюк наголошує, що згідно з новою освітньою парадигмою фахівець повинен оволодіти фундаментальними знаннями, професійними вміннями і навичками діяльності свого профілю, досвідом творчої і дослідницької діяльності вирішення професійних проблем, тобто він має бути професійно компетентним [3].

Основою компетентнісного підходу є орієнтація на результати навчання, що передбачає поєднання засвоєння знань і вмінь із їх практичним застосуванням та здатністю до самостійного оновлення й поповнення у разі професійної потреби. Це безпосередньо пов'язано з розвитком спеціальних умінь і навичок, необхідних для ефективної фахової діяльності.

Дослідження професійної підготовки майбутніх фахівців з прикладної математики свідчать про особливе значення фундаментальної математичної підготовки як основи розвитку алгоритмічного мислення, вміння розробляти програмне забезпечення. Наприклад, в своїй роботі Д.Є. Щедролосьєв наголошує на те, що основу програмування складає не тільки знання певної мови програмування, але й уміння побудови математичної моделі та відповідного алгоритму, тобто процес створення алгоритмів для розв'язання поставленого завдання [4]. О. Я. Кучерук, аналізуючи проблему формування математичної компетентності у майбутніх інженерів-програмістів, підкреслює, що професійна діяльність ІТ-фахівців нині вимагає глибоких знань у відповідних галузях застосувань, проте ці знання не дадуть очікуваного результату без фундаментальної математичної підготовки. Він вважає, що створення достовірної моделі тої предметної області, яка досліджується — самий важливий етап розробки програмного продукту що включає аналіз та дослідження широкого спектру алгоритмів та математичних методів, вибір найбільш прийнятних альтернатив, побудову, аналіз та алгоритмізацію моделі, вибір та використання програмних засобів та технологій [5].

Аналіз наукових досліджень дозволяє зробити висновок, що значну увагу в них приділяється методам формування фахових компетенцій майбутніх спеціалістів, удосконаленню навчального процесу. Прикладом таких досліджень є методика роботи зі студентами, яка спирається на дидактичні таблиці інтегративних зв'язків знань з математики і спеціальних дисциплін. Реалізації інтегративних зв'язків проілюстровані на прикладах з розділу "Диференціальні рівняння" для електротехнічних спецдисциплін з використанням пакету MathCAD [6]. В роботі А. Ройко і І. Микитюк наведено приклади використання професійно зорієнтованих задач при вивченні теми "Елементи диференціального числення" освітнього компонента "Вища математика". Розв'язання прикладних задач, що відображають реальні ситуації та ілюструють застосування похідної для побудови математичних моделей конкретних процесів, дають можливість ознайомити здобувачів освіти з базовими поняттями професійної діяльності та причиннонаслідковими зв'язками між ними [7]. В роботі [8] показана можливість інтегрування до навчального процесу методів математичного програмування, теорії ігор та теорії графів, демонструючи їх застосування на конкретних прикладах економічного змісту. Автори наголошують на важливості використання сучасних інформаційних технологій та програмних пакетів для ефективного розв'язання таких задач. У дослідженнях С. Дембіцької і О. Кобилянського розглянуто зміст професійної компетентності майбутніх фахівців з професійної освіти, а також висвітлено принципи та підходи, спрямовані на її формування засобами цифрових технологій [9].

Значний вклад у розвиток теорії компетентнісного підходу до підготовки майбутніх фахівців внесли науковці Н. Бібік, В. Вербицький, І. Гевлич, А. Вороновська, Д. Заводчиков, М. Кузьміна, А. Романишина, М. Соснін, В. Сериков, Н. Табачук, І. Хом'юк, Ю. Швалб та ін.

Разом з тим аналіз наукової і методичної літератури свідчить про те, що питання застосування спеціальних розділів математики до формування фахових компетентностей майбутніх спеціалістів з прикладної математики ще недостатньо досліджено як в теорії так і на практиці.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЦІЛЕЙ СТАТТІ (ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ)

Мета роботи — показати можливість використання спеціальних розділів математики у

підготовці студентів для формування професійних компетенцій спеціалістів з прикладної математики.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Забезпечити єдність і взаємозв'язок теорії і практики при підготовці компетентних фахівців дозволяє принцип інтеграції, оскільки саме міждисциплінарна інтеграція сприяє оволодінню студентами вміннями розв'язувати складні, комплексні, професійні завдання [10]. В цьому випадку базові дисципліни формують інструментарій, який інтегрується в спеціальні розділи математики. Такий підхід демонструє системність підготовки прикладного математика і підтверджує необхідність міцного фундаменту у вигляді лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу. Міжпредметні зв'язки відображають взаємозалежність наук, забезпечують структурованість знань і уникнення фрагментарності. Вони сприяють поглибленому розумінню предметів через їх взаємне доповнення, формують мислення, вміння аналізувати та синтезувати інформацію, розвивають науковий світогляд.

Математична підготовка майбутніх спеціалістів з прикладної математики має базуватися на таких принципах навчання, при яких засвоєння математичних методів інтегровані в умовні професійні сценарії. Це зумовлює розвиток вміння моделювати та аналізувати процеси, формує потребу в математичних інструментах, підвищує професійну компетентність. При такому підході навчальна діяльність набуває дослідницького і практично-орієнтованого характеру.

Спеціальні розділи математики дають змогу адаптуватися до різних галузей і побудовані так, щоб сформувані у студентів відповідні професійні компетенції та забезпечити досягнення навчальних результатів, що відповідають обраній спеціальності. При цьому навчальний процес організовується з урахуванням мотивації студентів до вивчення дисципліни та чіткого розуміння її значення у майбутній професійній діяльності.

Отже, система математичної підготовки майбутніх фахівців вимагає:

- формування математичної компетентності у процесі вивчення спеціальних розділів вищої математики;

- розвиток навичок математичного моделювання при вирішенні прикладних задач професійного спрямування;

- інтеграція математичних знань через міждисциплінарні зв'язки у межах освітньо-професійної програми.

Під математичною компетентністю розуміють здатність майбутніх фахівців до самостійного застосування математичних методів, моделей та інструментарію для вирішення професійно-орієнтованих завдань.

Процес формування математичної компетентності реалізується через системне засвоєння теоретичних знань, опанування практичних умінь та навичок.

Виділяють наступні рівні математичної компетентності:

- базовий — застосування готових алгоритмів, робота з відомими моделями;

- адаптивний — адаптація знань до нових умов, міждисциплінарний синтез;

- творчий — генерація нових ідей, дослідницькі підходи, нестандартні рішення.

Важливу роль у формуванні математичної компетентності відіграють прикладні задачі.

Під прикладною задачею ми розуміємо задачу, умова якої пов'язана з реальною практичною ситуацією, а її розв'язання вимагає використання теоретичних знань для отримання результату, важливого в певній сфері діяльності.

Розв'язання прикладних задач формує вміння аналізувати умову, виділяти головне, встановлювати зв'язки між даними, створює відчуття важливості предмета через його зв'язок з майбутньою професією. Також ці задачі сприяють формуванню міжпредметних зв'язків, розвивають логічне, алгоритмічне і творче мислення.

При виборі прикладних задач враховувалося наступне: обрана задача логічно впливає з матеріалу, який вивчається, а умова відображає типові ситуації майбутньої професії студентів. Визначаючи рівень складності задачі, бралася до уваги підготовка групи, по можливості задача допускала різні способи розв'язування. Крім того, розв'язок мав практичну цінність, тобто задача показувала, що вивчений матеріал застосовується у реальному житті.

Слід зауважити, що при розв'язанні прикладних задач студенти зазвичай проходять етапи математичного моделювання, які дозволяють перетворити реальну проблему до математичної форми. Це означає, що після побудови математичної моделі студент може отримати розв'язок за допомогою аналітичних, чисельних або графічних методів і перевірити результати, порівнявши їх з реальними даними чи практичними вимірюваннями. За потреби студент може уточнити модель та повторити розв'язання.

Розглянемо декілька прикладів професійної спрямованості, які пропонувались студентам при вивченні таких спеціальних розділів математики, як теорія функцій комплексної змінної, перетворення Фур'є і Лапласа, інтегральні рівняння.

Приклад 1. Знайти амплітуду струму в електричному колі з параметрами: опір $R = 4 \text{ Ом}$, індуктивність $L = 1 \text{ Гн}$, ємність $C = 0,01 \text{ Ф}$, джерело напруги $V(t) = 10 \cos 10t \text{ В}$, якщо всі елементи з'єднані послідовно.

Розв'яжемо приклад за допомогою методу комплексних амплітуд і опорів. Тоді $V = 10e^{i10t}$ (амплітуда напруги $V_0 = 10 \text{ В}$), комплексний опір котушки $Z_L = i\omega L$, комплексний опір конденсатора $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$. Оскільки в колі є активний опір R , то вважаємо його комплексним опором.

Скористаємось комплексним законом Ома

$$I = \frac{V}{Z},$$

$dZ = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ — комплексний опір кола. За умовою задачі $Z = 4 + i\left(10 \cdot 1 - \frac{1}{10 \cdot 0,01}\right) = 4 + i(10 - 10) = 4 \text{ (Ом)}$.

Отже, амплітуда струму $I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ (А)}$.

Теорія функцій комплексної змінної — дієвий апарат для аналізу. Зокрема, дробово-лінійні та раціональні функції є фундаментальними інструментами для опису конформних рухів площини та сфери (через стереографічну проекцію). Окрім того, перехід у комплексну область в багатьох випадках спрощує розв'язання систем поліноміальних рівнянь.

Розділ теорії функцій комплексної змінної — "теорія лишків" знаходить застосування не лише в обчисленні інтегралів комплексного аналізу, а й у задачах з визначеними інтегралами від дійсних функцій. Часто цей метод дає змогу значно спростити розрахунки в тих випадках, коли звичайні аналітичні методи є надто громіздкими.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3 \cos t}$.

Підінтегральна функція $\frac{1}{5 + 3 \cos t}$, яка є раціональною функцією аргументу $\cos t$, неперервна

на проміжку інтегрування. Після заміни змінної

$$z = e^{it}, \text{ матимемо } \frac{dz}{iz} = dt, \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1 + z^2}{2z}.$$

У цьому випадку шлях інтегрування — коло одиничного радіуса з центром в початку координат $|z| = 1, 0 \leq t \leq 2\pi$. Для обчислення інтеграла застосуємо формулу

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \oint_{|z|=1} F(z) dz.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3 \cos t} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(5 + 3 \frac{1 + z^2}{2z} \right)} = \\ &= \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2 + 10z + 3} \end{aligned} \quad (1).$$

Для обчислення отриманого інтеграла скористаємось методом лишків. За основною теоремою про лишки, якщо C — замкнена гладка крива, яка обмежує область D , а функція $F(z)$ аналітична в замкненій області $\bar{D}$, крім скінченного числа ізольованих особливих точок $z_k \in D, k = 1, 2, \dots, n$, то

$$\oint_C F(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } F(z_k) \quad (2).$$

Визначимо особливі точки підінтегральної функції $F(z) = \frac{z}{3z^2 + 10z + 3}$. Для цього знай-

демо нулі знаменника дробу $3z^2 + 10z + 3 = 0$. Особливими точками підінтегральної функції

є точки $z_1 = -\frac{1}{3}, z_2 = -3$ (полюси першого поряд-

ку). Точка z_1 належить області $|z| < 1$, точка z_2 знаходиться зовні цієї області. Тоді формула (2) для інтеграла (1) набуває вигляду:

$$\oint_{|z|=1} F(z) dz = 2\pi i \text{Res } F(z_1) \quad (3),$$

де шлях інтегрування — коло одиничного радіуса з центром у початку координат.

Обчислимо лишок в особливій точці $z_1 = -\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} \text{Res } F(-1/3) &= \frac{1}{(3z^2 + 10z + 3)' \Big|_{z=-1/3}} = \\ &= -1/3 = \frac{1}{6z + 10} \Big|_{z=-1/3} = \frac{1}{8} \end{aligned} \quad (4).$$

Тоді за формулою (3) з урахуванням (4) інтеграл (1) буде дорівнювати

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+3\cos t} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2+10z+3} = \frac{2}{i} 2\pi i \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}.$$

Один з прикладів застосування інтегрального перетворення Фур'є — задача фільтрації високочастотного шуму з сигналу.

Приклад 3. Дано сигнал, який змінюється у часі $f(t) = \sin 2\pi t + 0,5 \sin 20\pi t$.

Потрібно відфільтрувати високочастотний шум.

Для розв'язання задачі скористаємося прямим перетворенням Фур'є:

$$\bar{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

За умовою задачі сигнал складається з двох гармонік

$$f(t) = \underbrace{\sin 2\pi t}_{\text{Низька частота}} + \underbrace{0,5 \sin 20\pi t}_{\text{Висока частота (шум)}}$$

Скористаємося властивістю перетворення Фур'є для синуса:

$$\mathcal{F}\{\sin \omega_0 t\} = i\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)],$$

де $\delta(\omega)$ — дельта-функція Дірака.

Розглянемо перший доданок $\sin 2\pi t$, для якого частота $\omega_1 = 2\pi$:

$$\mathcal{F}\{\sin 2\pi t\} = i\pi[\delta(\omega + 2\pi) - \delta(\omega - 2\pi)].$$

Для другого доданку $0,5 \sin 20\pi t$ частота $\omega_2 = 20\pi$:

$$\mathcal{F}\{0,5 \sin(20\pi t)\} = 0,5 \cdot i\pi[\delta(\omega + 20\pi) - \delta(\omega - 20\pi)].$$

Перетворення Фур'є запишеться у вигляді

$$\bar{f}(\omega) = i\pi[\delta(\omega + 2\pi) - \delta(\omega - 2\pi)] + 0,5 \cdot i\pi[\delta(\omega + 20\pi) - \delta(\omega - 20\pi)].$$

Отримане перетворення Фур'є складається з чотирьох дельта-функцій: низькі частоти (піки на $\omega = \pm 2\pi$) — основний сигнал та високі частоти (піки на $\omega = \pm 20\pi$) — шум.

Для того, щоб видалити шум, треба обнулити компоненти з частотами $|\omega| > 10\pi$:

$$\bar{f}_\phi(\omega) = \begin{cases} \bar{f}(\omega), & |\omega| \leq 10\pi, \\ 0, & |\omega| > 10\pi. \end{cases}$$

Далі відновлюємо відфільтрований сигнал. Для цього застосовуємо обернене перетворення Фур'є:

$$f_\phi(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\bar{f}_\phi(\omega)\} = \sin 2\pi t.$$

Як самостійну роботу, кожному студенту пропонується створити за допомогою Python комп'ютерну модель заданого сигналу та побудувати графіки вхідного й відфільтрованого сигналів.

Інтегральне перетворення Лапласа широко використовується в наукових та інженерних розрахунках для дослідження властивостей динамічних систем, а також розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь. Таке поширення пов'язано з тим, що багатьом співвідношенням і операціям над функціями-оригіналами $f(t)$ відповідають набагато простіші співвідношення між їхніми зображеннями $F(p)$. Так, наприклад, інтегрування оригіналу в межах від 0 до t зводиться в просторі зображень до ділення зображення на p , а лінійні диференціальні рівняння перетворюються на алгебраїчні.

В наступному прикладі проаналізуємо перехідний процес за допомогою перетворення Лапласа.

Приклад 4. Електричне коло, зображене на рис. 1, складається з опорів R_1, R_2 та ємності C . В момент часу $t = 0$ до електричного кола підключається стала електрорушійна сила $e(t) = e_0$; до її підключення сила струму і заряд на обкладках конденсатора дорівнювали нулю. Знайти перехідний струм $i(t)$, якщо $e_0 = 10$ В, $R_1 = R_2 = 20$ Ом, $C = 10^{-3}$ Ф.

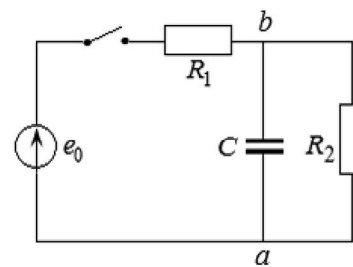


Рис. 1. Схема електричного кола

За законом Ома операторний струм дорівнює $I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)}$, де зображення електрорушійної сили $e(t)$ має вигляд: $E(p) = \frac{e_0}{p}$, а операторний опір контуру для заданої схеми $Z(p) = R_1 + Z_{ab}(p)$,

де $Z_{ab}(p) = \frac{R_2}{pCR_2 + 1}$ в схемі з паралельним з'єднанням.

Тоді для всього контуру при послідовному з'єднанні операторний опір дорівнює

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2}{pCR_2 + 1} = \frac{pCR_1R_2 + R_1 + R_2}{pCR_2 + 1},$$

а операторний струм

$$I(p) = \frac{e_0}{p} \cdot \frac{pCR_2 + 1}{pCR_1R_2 + R_1 + R_2}.$$

Враховуючи умови задачі, отримаємо

$$I(p) = \frac{10(p \cdot 10^{-3} \cdot 20 + 1)}{p(p \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 20 + 20 + 20)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p + 50}{p(p + 100)}.$$

Щоб повернутися до шуканої функції-оригіналу, розкладемо отриманий вище дріб на прості дробі:

$$\frac{p + 50}{p(p + 100)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 100} = \frac{A(p + 100) + Bp}{p(p + 100)};$$

$$p + 50 = A(p + 100) + Bp.$$

$$p = 0 \quad \left| \quad 50 = 100A; \quad A = 1/2;$$

$$p = -100 \quad \left| \quad -50 = -100B. \quad B = 1/2.$$

Отже, можемо записати операторний струм у вигляді

$$I(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p + 50}{p(p + 100)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1/2}{p} + \frac{1/2}{p + 100} \right) =$$

$$= 0,25 \frac{1}{p} + 0,25 \frac{1}{p + 100}.$$

Для визначення перехідного струму скористаємося таблицею відповідності, отримаємо (рис. 2).

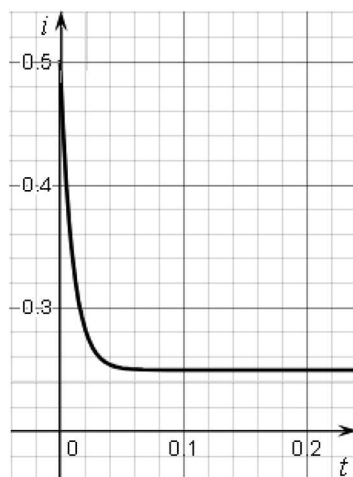


Рис. 2. Графік перехідного струму

Інтегральні рівняння відіграють важливу роль як у сучасній математиці так і в її застосуваннях — теорії пружності, теорії потенціалу, математичній фізиці, економічному моделюванні та інших галузях науки. Саме тому вивчення методів розв'язання інтегральних рівнянь є важливою частиною підготовки студентів математичних та фізико-технічних спеціальностей.

Розглянемо інтегральне рівняння, яке має назву "модель популяції"

$$y(x) = x + \lambda \int_0^1 xsy(s)ds,$$

та з'ясуємо його можливі застосування. В цьому рівнянні лінійний член x описує природ-

не зростання, а інтегральний член $\int_0^1 xsy(s)ds$ вра-

ховує нелокальну взаємодію (кооперація, конкуренція за ресурси, епідемії тощо) всіх особин s з особиною x . Ця нелокальна взаємодія коригує лінійне зростання $y(x) = x(\lambda = 0)$ і називається "поправкою на взаємодію".

Приклад 5. Розв'язати інтегральне рівнян-

$$y(x) = x + \lambda \int_0^1 xsy(s)ds$$

Дане рівняння є інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду з виродженим ядром. Знайдемо його розв'язок при $\lambda = 1$, тобто

$$y(x) = x + x \int_0^1 sy(s)ds \quad (5).$$

Введемо позначення

$$C = \int_0^1 sy(s)ds \quad (6),$$

де C — невідома стала. Отже, рівняння (5) набуває вигляду:

$$y(x) = x + Cx \quad (7).$$

Підставивши вираз (7) в (6), отримуємо:

$$C = \int_0^1 s(s + Cs)ds = \left(\frac{s^3}{3} + C \frac{s^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{C}{3},$$

$$\text{тобто } C = \frac{1}{3} + \frac{C}{3}, \quad C = \frac{1}{2}.$$

Зі знайденим значенням C розв'язок рівняння (7) можна записати так:

$$y(x) = x + \frac{x}{2} = \frac{3x}{2}.$$

Отже, при взаємодії $\lambda = 1$ зростання посилюється в 1,5 рази.

Зауважимо, що параметр λ може бути від'ємним у випадку, коли зростання сповільнюється.

Розглянутий приклад можна адаптувати змінюючи ядро $K(x, s)$, наприклад, до економічних моделей, де враховується взаємодія між агентами (модель кредитного ризику із залежністю позичальника, модель поширення інно-

вацій тощо). Таким чином, інтегральні рівняння широко застосовуються на практиці, зокрема в задачах, де математичне моделювання ґрунтується на врахуванні сумарного впливу відомих величин на досліджувані характеристики. При цьому задачі, що описуються різними диференціальними рівняннями, часто приводяться до єдиної форми інтегрального рівняння.

Розв'яжемо приклад, який ілюструє зв'язок теорії інтегральних рівнянь з перетвореннями Лапласа.

Приклад 6. Попит $q(t)$ на новий товар у момент часу t складається з первинного попиту $q_0 \cdot e^{-bt}$ та попиту, викликаного реакцією на рекламу. Вплив останнього попиту згасає за експоненціальним законом з темпом $\alpha > 0$ та інтенсивністю γ , тобто попит $q(t)$ змінюється за законом:

$$q(t) = q_0 \cdot e^{-bt} + \int_0^t \gamma e^{-\alpha(t-\tau)} q(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (8),$$

де $q(t)$ — шуканий попит, параметри q_0, b, α, γ — задані ($b \geq 0$). Необхідно знайти розв'язок рівняння $q(t)$.

Рівняння попиту є рівнянням Вольтерри другого роду. Знайдемо розв'язок задачі операційним методом. Вважаємо шукану функцію $q(t)$ оригіналом і перейдемо від рівняння (8), що зв'язує оригінали, до рівняння, що зв'язує їх зображення.

Позначимо $q(t) \rightleftharpoons Q(p)$. За перетворенням Лапласа $q_0 e^{-bt} \rightleftharpoons \frac{q_0}{p+b}$.

Скориставшись теоремою про згортку, отримуємо зображення інтегралу

$$\int_0^t \gamma e^{-\alpha(t-\tau)} q(\tau) d\tau \rightleftharpoons \gamma \cdot \frac{1}{p+\alpha} \cdot Q(p).$$

В результаті замість інтегрального отримуємо алгебраїчне рівняння з невідомим зображенням $Q(p)$:

$$Q(p) = \frac{q_0}{p+b} + \gamma \frac{1}{p+\alpha} Q(p).$$

Розв'язавши це рівняння відносно $Q(p)$, маємо:

$$\left(1 - \frac{\gamma}{p+\alpha}\right) Q(p) = \frac{q_0}{p+b},$$

або

$$Q(p) = q_0 \frac{p+\alpha}{(p+b)(p+\alpha-\gamma)}.$$

Розклавши $Q(p)$ на прості дробі і визначивши коефіцієнти розкладання, запишемо

$$Q(p) = \frac{q_0(\alpha-b)}{\alpha-b-\gamma} \cdot \frac{1}{p+b} - \frac{q_0\gamma}{\alpha-b-\gamma} \cdot \frac{1}{p+\alpha-\gamma}.$$

Отриманому зображенню відповідає оригінал

$$q(t) = \frac{q_0(\alpha-b)}{\alpha-b-\gamma} e^{-bt} - \frac{q_0\gamma}{\alpha-b-\gamma} e^{-(\alpha-\gamma)t},$$

$$\alpha-b-\gamma \neq 0, \alpha-\gamma > 0.$$

Розв'язання практичних завдань, сформульованих у вигляді інтегральних рівнянь, найчастіше вимагає застосування наближених чисельних методів. Саме тому в курсі "Інтегральні рівняння" передбачені завдання, в яких використовуються наближені методи розв'язання інтегральних рівнянь із застосуванням пакету символьних обчислень Mathematica.

ВИСНОВКИ

Прикладна спрямованість розглянутих задач зумовлена необхідністю інтеграції вивчення спеціальних розділів математики з професійною підготовкою майбутніх бакалаврів. Такий підхід забезпечує формування в студентів практичних умінь у розв'язанні виробничих задач, сприяє підвищенню їхньої професійної компетентності та відповідає вимогам конкурентного середовища сучасного ринку праці. Особливого значення при цьому набуває використання комп'ютерного моделювання та програмних засобів, що дозволяє наблизити навчальний процес до реальних умов професійної діяльності та підвищити ефективність засвоєння матеріалу.

Література:

1. Прокопенко Н.А. Цілі та зміст навчання векторної алгебри у системі інженерної освіти. [Електронне видання]. Didactics of mathematics: Problems and Investigations. Донецьк. 2009. № 32. С. 169—177. URL: <https://ea.donntu.edu.ua/bitstream/123456789/7880/1/%D0%94%D0%B8%D0%B4%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D0%9C%20%E2%84%9632%202009.1.pdf> (дата звернення: 22.08.2025)
2. Уланова Н.П., Одновол М.М., Приходько В.В. Якість освіти — гарантія ефективності навчального закладу. Проблеми використання інформаційних технологій в освіті, науці та промисловості: зб. наук. пр. XV міжнар. конф., м. Дніпро, 15—17 груд. 2020 р. Дніпро, 2021. № 5. С. 13—17.
3. Стрюк К.М. Сучасні напрями підготовки фахівців із комп'ютерної інженерії. Інноваційна педагогіка. Одеса, 2019. Вип. 11. Т.3. С. 102—106.

4. Щедролосьєв Д.Є. Методична система навчання дискретної математики майбутніх інженерів-програмістів засобами інформаційних технологій: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.04. Херсон, 2011. 20 с.

5. Кучерук О. Я. Компетентнісний підхід у підготовці майбутніх інженерів-програмістів. Науковий огляд. Київ, 2014. Т. 3. № 2. С. 79—86.

6. Мохонько А.З., Васіна Л.С. До питання про інтегративні зв'язки математики та спеціальностей. Математика в сучасному технічному університеті: матеріали IV міжнар. наук.-практ. конф., м.Київ, 24—25 груд. 2015 р. Київ, 2016. С. 186—190.

7. Ройко Л.Л., Микитюк І.О. Прикладна спрямованість освітнього компонента "Вища математика": Математика. Інформаційні технології. Освіта: зб. статей XIII міжнар. наук.-практ. конф. Луцьк, 2024. № 11. С. 110—116.

8. Кагадій Т.С., Щербина І.В., Шпорта А.Г. Застосування спеціальних розділів математики у формуванні фахових компетентностей економістів. [Електронний ресурс]. Агросвіт. Київ, 2025. № 7. С. 64—71. URL: <https://nauka.com.ua/index.php/agrosvit/article/view/6071>

9. Дембіцька С., Кобилянський О. Формування професійної компетентності майбутніх фахівців з професійної освіти засобами цифрових технологій. Педагогіка безпеки. Вінниця, 2024. Т. 8. № 1—2. С. 1—7.

10. Насонова С., Рижков Е. Застосування офісних інформаційних технологій як альтернатива програмному розв'язанню економічних задач на графовій моделі. [Електронне видання]. Адаптивне управління: теорія і практика. Серія "Економіка". Харків, 2021. Вип. 10(20). URL: <https://amtp.org.ua/index.php/journal2/article/view/365/316>

References:

1. Prokopenko, N.A. (2009), "The goals and replacement of vector algebra in the engineering lighting system", Didactics of mathematics: Problems and Investigations, [Online], vol. 32, available at: <https://ea.donntu.edu.ua/bitstream/123456789/7880/1/%D0%94%D0%B8%D0%B4%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D0%9C%20%E2%84%9632%202009.-1.pdf>, (Accessed 22 August 2025).

2. Ulanova, N.P. Odnovol, M.M. and Prikhodko, V.V. (2021), "The intensity of illumination is a guarantee of the effectiveness of the initial investment", Problemy vykorystannia informatsiynykh tekhnolohij v osviti, nautsi ta promyslo-

vosti: zb. nauk. pr. KhV mizhnar. konf. [Problems of the development of information technologies in education, science and industry XV International Conf], National Technical University Dnipro Polytechnic, Dnipro, Ukraine, no. 5. pp. 13—17.

3. Stryuk, K.M. (2019), "Current direct training of facyhysts from computer engineering/innovative pedagogy", vol. 11, vol. 3, 2019. pp. 102—106.

4. Shchedrolosiev D.Ye. (2011), "A methodical system for teaching discrete mathematics to future software engineers using information technologies", Abstract of Ph.D. dissertation, pedagogical sciences, Kherson State University, Kherson, Ukraine.

5. Kucheruk, O.Ya. (2014) "Competent approach to the training of future software engineers", Scientific review, vol. 3, no. 2, pp. 79—86.

6. Mokhonko, A.Z. Vasina, V.D. and Mokhonko, V.D. (2016) "Before the meal about the integrative connections of mathematics and special disciplines", Matematyka v suchasnomu tekhnichnomu universyteti: materialy IV mizhnar. nauk.-prakt. konf. [Mathematics in the current technical university, materials of the IV International Scientific and Technical University scientific-practical Conf.], National Technical University "KPI", Kyiv, Ukraine, pp. 186—190.

7. Royko, L.L. and Mykytyuk, I.O. (2024), "Applied directness of the educational component "Higher Mathematics", Matematyka. Informatsijni tekhnolohii. Osvita: zb. statej XIII mizhnar. nauk.-prakt. konf. [Mathematics. Information technologies. Lighting XIII Mizhnar. scientific-practical conf.: col. Articles], Volyn National University named after Lesya Ukrainka, Lutsk, Ukraine, no. 11, pp. 110—116.

8. Kagadiy, T.S. Shcherbina, I.V. and Shpor-ta, A.G. (2025), "Establishment of special branches of mathematics in the formation of economic competencies of economists", Agrosvit, vol. 7, pp. 64—71, available at: <https://nauka.com.ua/index.php/agrosvit/article/view/6071> (Accessed 25 Oct 2025).

9. Dembitska, S. and Kobilyansky, O. (2024), "Formation of professional competence of future frontline workers with professional knowledge of digital technologies", Safety pedagogy, vol. 8, no. 1—2, pp. 1—7.

10. Nasonova, S. and Ryzhkov E. (2021), "Application of office information technologies as an alternative to software development of economic tasks on a graph model", Electronic scientific publication "Adaptive management: theory and practice". Series "Economics", vol. 10(20), available at: <https://amtp.org.ua/index.php/journal2/article/view/365/316> (Accessed 25 Oct 2025).

Стаття надійшла до редакції 02.11.2025 р.