

Електронний журнал «Ефективна економіка» включено до переліку наукових фахових видань України з питань економіки (Категорія «Б», Наказ Міністерства освіти і науки України № 975 від 11.07.2019). Спеціальності – 051, 071, 072, 073, 075, 076, 292. Ефективна економіка. 2024. № 5.

DOI: <http://doi.org/10.32702/2307-2105.2024.5.94>

УДК: 336.531.2 : 330.131.7 "408"

Л. В. Добриніна,

к. е. н., ст. викладач кафедри фінансового менеджменту та фондового ринку,

Одеський національний економічний університет

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-0685-1741>

Ю. В. Гаврилюк,

здобувач вищої освіти першого (бакалаврського) рівня,

Одеський національний економічний університет

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0004-6112-0118>

ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНОГО МУЛЬТИАКТИВНОГО ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА РИЗИКУ

L. Dobrynina,

PhD in Economics, Senior Lecturer of the Department of Financial management

and the stock market, Odesa National University of Economics

Yu. Gavrilyuk,

Candidate of educational degree «bachelor»,

Odesa National University of Economics

FEATURES OF THE CONSTRUCTION OF AN OPTIMAL MULTIACTIVE INVESTMENT PORTFOLIO IN CONDITIONS OF UNCERTAINTY AND RISK

Стаття розглядає ключові аспекти формування ефективних інвестиційних портфельів в сучасних умовах інвестування, зосереджуючись на оптимізації портфельів в контексті економічної невизначеності та кризових явищ. Авторами проаналізовано теоретичні підходи науковців і існуючі концепції дослідників щодо інвестиційного портфеля, та запропоновано для побудови інвестиційного портфеля розробити модифіковану модель ефективного портфеля за Марковіцем. В статті досліджуються різні методики вимірювання та управління ризиками, зокрема, варіація, MAD (Mean Absolute Deviation), Lower Partial Moments and Central Semideviations, VaR (Value-at-Risk), CVaR (Conditional Value-at-Risk), а також стохастичне домінування. Такі методи дозволяють глибше аналізувати потенційні ризики та прибутковість інвестиційних портфельів. Під час розробки модифікованої моделі Марковіца, автори докладно описують математичні моделі та комп'ютерні алгоритми, використовувані для оптимізації портфельів, з особливим акцентом на матричному підході та використанні програмних засобів для автоматизації процесу. Вони також розглядають практичні аспекти формування інвестиційних портфельів, зокрема диверсифікацію та вибір активів. У статті надається механізм оптимізації інвестиційних портфельів, використовуючи сучасні математичні та комп'ютерні методики, що є особливо актуальним у сучасному динамічному фінансовому середовищі.

The article considers the key aspects of the formation of effective investment portfolios in modern investment conditions, focusing on the optimization of portfolios in the context of economic uncertainty and crisis phenomena. The authors analyzed the theoretical approaches of scientists and the existing concepts of researchers regarding the investment portfolio, and proposed to develop a modified model of the effective portfolio according to Markowitz for the construction of the investment portfolio. The article examines various methods of risk measurement and management, in particular, variation, MAD (Mean Absolute

Deviation), Lower Partial Moments and Central Semideviations, VaR (Value-at-Risk), CVaR (Conditional Value-at-Risk), as well as stochastic dominance. Such methods allow a deeper analysis of potential risks and profitability of investment portfolios. In developing the modified Markowitz model, the authors describe in detail the mathematical models and computer algorithms used to optimize portfolios, with special emphasis on the matrix approach and the use of software tools to automate the process. They also consider the practical aspects of building investment portfolios, including diversification and asset selection. When developing the modified Markowitz efficient portfolio model, improvements to the basic model were proposed to better take into account risks and investment goals, use of modern optimization methods and algorithms, development of an autonomous search algorithm for the most profitable risk-weighted portfolio.

A modified model has been developed that takes into account modern market conditions and investment goals. The software solution simplifies the process of portfolio optimization, allowing investors to effectively manage their assets in the face of constantly changing market conditions. The article provides a mechanism for optimizing investment portfolios using modern mathematical and computer techniques, which is especially relevant in today's dynamic financial environment.

Ключові слова: *інвестиційний портфель, економічна невизначеність, вимірювання ризиків, стохастичне домінування, комп'ютерні алгоритми, автоматизація процесів, метод Монте-Карло, Лагранжіан (метод Лагранжа).*

Keywords: *investment portfolio, economic uncertainty, risk measurement, stochastic dominance, computer algorithms, process automation, Monte Carlo method, Lagrangian (Lagrange method).*

Постановка проблеми. Економічне процвітання залежить не тільки від масштабів вільних ресурсів, а і від ефективного управління щодо розподілу та інвестуванню в перспективні галузі та проєкти. Реалізація

дієвих інвестиційних проєктів, а не інфляційне фінансування економіки є запорукою інтенсивного економічного розвитку. Особливе місце на ряду з реальним інвестуванням займає портфельне інвестування, що дозволяє інвестору безперервно модифікувати портфель, з метою запобігання збитків. Актуальність оптимізації інвестиційних портфельів є ключовою у сучасних фінансових умовах. Вона дозволяє інвесторам зменшити ризики та збільшити потенційний прибуток від вкладень. Ефективне управління активами, враховуючи їх волатильність та очікувану віддачу, є важливою складовою для досягнення довгострокового фінансового успіху. Сучасна теорія фінансів активно модифікується під впливом розширення математичного інструментарію, для зростаючих потреб аналізу складних фінансових інструментів. Використання матричного підходу для розрахунку дисперсії портфелю та визначення оптимальних часток активів забезпечує точність і глибину аналізу, необхідну для прийняття обґрунтованих інвестиційних рішень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання сутності портфельного інвестування та математичних моделей, покликані для управління щодо оптимізації портфеля, займають значне місце у дослідженні серед робіт вітчизняних та закордонних науковців. Серед них особливо слід відзначити Дж. А. Бейлі, Г. Марковіца, М. Міллера, А.О. Недосєкіна, Д. Тобіна, В. Шарпа. Зазначені науковці зробили важливі відкриття та розробки в області управління інвестиційними портфелями. Також заслуговують на увагу роботи українських вчених, таких як: І.А. Бланк, О.В. Васюренко, А.М. Мороз, Б.В. Губський, М.П. Денисенко, чиї дослідження та праці значно поглибили розуміння портфельного управління. Але досі не достатньо розглянутим залишається розгляд можливостей та викликів застосування програмних засобів для автоматизованого розв'язання завдань оптимізації портфеля та структурний порівняльний аналіз основних методів оптимізації інвестиційного портфелю.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є структуроване дослідження основних моделей оптимізації інвестиційного портфеля з метою подальшої розробки модифікованої моделі ефективного портфеля Марковіца та розробка програмного рішення автономного пошуку найбільш прибуткового портфеля, зваженого на ризик.

Викладення основного матеріалу. Основною метою диверсифікації будь-якого інвестиційного портфеля є зменшення ризику. Історично першою мірою ризику, що використовувалася у виборі портфеля, була варіація[1]. Вона визначається як другий центральний момент випадкової змінної, тобто очікуване значення квадрата відхилень портфельного прибутку від його середнього значення. На базі показника варіативності портфеля заснований підхід Марковіца для оптимізації портфеля, але його стандартна модифікація досить часто надає контрінтуїтивні результати, бо є симетричною, що для фінансових розрахунків є незручним та змушує використовувати додаткові інструменти щодо відсіювання результатів, що є нерезультативними на даному етапі. Додатково варто зазначити, що знаходження показників варіації для мультиактивних портфелів може бути досить складною для стандартних комп'ютерних обчислень. Рішенням проблеми складних комп'ютерних обчислень для великих обсягів даних може стати застосування методу середніх абсолютних відхилень (Mean Absolute Deviation, MAD)[2]. Даний метод визначається як очікуване значення абсолютних відхилень портфельного прибутку від його середнього значення. Хоча MAD більш практичний для великих наборів даних, він все ж таки менш популярний, ніж варіація, оскільки вважається, що він надає меншу інформацію про розподіл прибутку. Перейдемо до розгляду нижніх часткових моментів та центральних напіввідхилень (Lower Partial Moments and Central Semideviations), які представляють собою асиметричні міри ризику [3]. Цей метод зосереджується на оцінці очікуваних відхилень прибутку портфеля нижче встановленого цільового рівня, надаючи інвесторам можливість глибше аналізувати потенційні небажані наслідки їхніх інвестиційних рішень. У

контексті оцінки максимально можливих збитків, метод Value-at-Risk (VaR) відіграє ключову роль[4]. VaR вимірює найбільшу очікувану втрату в портфелі протягом певного часового періоду з заданою ймовірністю. Цей підхід дозволяє інвесторам оцінити ризики, пов'язані з "найгіршими" сценаріями в їхньому портфелі. Поглиблюючи концепцію VaR, підхід умовної вартості ризику (CVaR) враховує не тільки максимально можливі збитки, але й середній розмір збитків у найгірших сценаріях[5]. CVaR надає більш комплексне розуміння ризиків, аналізуючи потенційні втрати, які можуть перевищити порогові значення VaR. З іншого боку, підхід максимізації очікуваної корисності фокусується на індивідуальних перевагах інвесторів щодо ризику та прибутку. Цей метод дозволяє оцінити портфель на основі того, як інвестор може реагувати на різні потенційні результати інвестицій, враховуючи їхні уподобання та ставлення до ризику.

На завершення, стохастичне домінування являє собою підхід, який включає порівняння портфелів на основі їх повного розподілу прибутку [6]. Ця методика дозволяє вважати один портфель кращим за інший, якщо він стохастично домінує над ним. Термін "стохастичне домінування" відноситься до ієрархічної системи порівняння двох різних розподілів ймовірностей, що дозволяє дедуктивно визначити перевагу одного інвестиційного варіанта над іншим у контексті очікуваних доходів та асоційованих ризиків. Ця концепція займає центральне місце у теорії портфельного вибору та теорії прийняття рішень, де ризик і невизначеність відіграють ключову роль.

У рамках стохастичного домінування, портфель А стохастично домінує над портфелем В у першому порядку, якщо функція розподілу кумулятивної ймовірності портфеля А перевершує або еквівалентна функції розподілу портфеля В у всіх можливих точках. Це означає, що за будь-яких обставин, ймовірність досягнення певного рівня доходу від портфеля А є не меншою, ніж така ж ймовірність для портфеля В.

Існування різних порядків стохастичного домінування дозволяє проводити більш нюансоване порівняння портфелів. Наприклад, стохастичне

домінування другого порядку враховує не тільки ймовірності досягнення певного доходу, але й ступінь ризику, асоційованого з кожним портфелем. Такий підхід є особливо корисним у контексті прийняття рішень інвесторами, що виявляють різні рівні ризико-аверсії.

Також існують міри ризику, які відповідають стохастичному домінуванню, що забезпечують, щоб прийняті рішення відповідали оптимальності для певних класів інвесторів. Ці міри ризику зосереджені на вирішенні складних завдань вибору в умовах різних рівнів ризико-неврівноваженості, що дає можливість інвесторам робити більш обґрунтовані рішення.

Узагальнимо надану інформацію стосовно методів оптимізації інвестиційного портфеля у наступній таблиці.

Таблиця 1. Основні методи знаходження оптимального портфеля

Метод	Переваги	Недоліки
Варіація (Variance)	Широко використовується, добре вивчена; зручна для аналізу та порівняння портфелів.	Не завжди адекватно відображає ризик; може призводити до контрінтуїтивних результатів.
Середнє Абсолютне Відхилення (MAD)	Підходить для великих наборів даних; менш складний, ніж варіація.	Менш інформативний, ніж варіація; може втрачати деталі розподілу.
Нижні Часткові Моменти	Краще відображає ризик як небажаний результат; враховує асиметрію розподілу.	Складний у реалізації та інтерпретації; вимагає вибору цільової величини.
Value-at-Risk (VaR)	Простий у розумінні; надає ясний поріг ризику.	Не враховує можливість великих збитків; не є субадитивним.
Умовна Вартість Ризику (CVaR)	Враховує потенційні великі збитки; більш інформативний, ніж VaR.	Складні розрахунки; може бути важко використовувати у практичних сценаріях.
Стохастичне Домінування	Надає нюансований аналіз ризиків та доходів; враховує різні рівні ризику.	Може бути складним для застосування у практичних ситуаціях.

Джерело: побудовано авторами на основі [1-6]

У подальшому аналіз буде опиратися на модифікації моделі Марковіца для оптимізації інвестиційного портфеля. Основною метою диверсифікації портфеля є зменшення ризику. У теорії Марковіца, що є підґрунтям сучасної теорії кількісних фінансів, ризик вимірюється за допомогою волатильності

(стандартного відхилення) ціни активу [1, 7]. Тому в теорії оптимізації проблема вибору портфеля зводиться до розв'язання наступної оптимізаційної задачі:

$$\begin{aligned} \min_w \quad & \sigma(w) \\ \text{S.T.} \quad & \omega_i \geq 0 \\ & \sum w_i = 1 \end{aligned} \quad 1)$$

Однак цей прямий метод вимагає серйозних математичних розрахунків і великої кількості обчислювальних потужностей. Крім того, цей метод не враховує вплив премії за ризик та рівень схильності інвестора до ризику. З цієї причини в сучасній фінансовій теорії використовується коефіцієнт Шарпа. Коефіцієнт Шарпа визначається як [4]:

$$SR_w = \frac{R(w) - R_f}{\sigma(w)} \quad 2)$$

де $R(w)$ – дохідність портфеля, R_f – безризикова ставка, $\sigma(w)$ – волатильність портфеля.

За визначенням, дохідність дорівнює

$$r_t = \frac{p_t}{p_{t-1}}$$

Логарифмічна дохідність є найпоширенішою метрикою для оцінки ефективності інвестицій завдяки притаманній їй адитивності протягом певних часових інтервалів. Зокрема, агрегована властивість логарифмічної доходності полегшує підсумовування індивідуальних дохідностей за певний період, таким чином отримуючи загальну логарифмічну дохідність за цей період. Ця характеристика підкреслює корисність лог-дохідності у фінансовій сфері [9]. Тепер обчислимо лог-дохідність акцій наступним чином:

$$\log r_t = \log \frac{p_t}{p_{t-1}}$$

Це нормалізований ваговий вектор, тому всі w складають одиницю, це говорить нам про те, яку частку бюджету ви повинні виділити на кожную

акцію. В економіках з низькою інфляцією нульові або близькі до нуля відсоткові ставки означають, що реальні безризикові ставки є низькими. Тому в нашій моделі ми вважаємо, що $R_f \sim 0$ [4]. Оскільки ми шукатимемо максимальні значення $SR(w)$ і R є спільним для всіх w , то ми обчислимо:

$$R(w) = w^T \log(r)$$

Волатильність мовою матричної алгебри визначається як:

$$\sigma(w) = \sqrt{w^T \Sigma w}$$

де Σ коваріаційна матриця, у нашому випадку дорівнює:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

де:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N - 1}$$

тому:

$$SR(w) \sim \frac{w^T \log(r)}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

Ми шукаємо w , яке максимізує $SR(w)$

Щоб досягти оптимальної стратегії розподілу активів, необхідно визначити профіль інвестора, який розглядається. Для цього можна розглянути дві різні парадигми портфеля:

- 1 **Портфель А** характеризується активами з низькою або від'ємною кореляцією. Такий цілеспрямований відбір активів має на меті сформувати портфель, в якому інвестиції, що входять до його складу, демонструють мінімальну синхронність у зміні цін. Така стратегія має на меті зменшити загальний ризик, оскільки очікується, що активи в портфелі по-різному реагуватимуть на динаміку ринку.
- 2 **Портфель Б**, з іншого боку, формується з метою підтримання кореляції нижче певного порогового значення, забезпечуючи таким чином надійну диверсифікацію. Тим не менш, у цьому випадку акцент

робиться на визначенні активів, які переважно демонструють позитивну середню дохідність. Такий підхід має на меті досягти балансу між зниженням ризику через диверсифікацію та пошуком активів зі сприятливими середніми характеристиками дохідності.

У контексті цього розподілу активів основна увага буде приділена створенню портфеля, що відповідає характеристикам, визначеним для портфеля А, де акцент робиться на забезпеченні низької або від'ємної кореляції між обраними активами.

У мікроекономічному контексті вирішення проблеми розподілу активів характеризується включенням до оптимального портфеля активів-замінників та активів з різною якістю. Цей процес передбачає ретельний розгляд і відбір активів, які демонструють певний ступінь взаємозамінності, що дозволяє забезпечити стратегічну взаємозамінність певних інвестицій. Водночас, включення активів з різними якісними характеристиками є невід'ємною частиною загальної стратегії оптимізації [7]. Наприклад, очевидним є створення портфеля з державних облігацій та акцій компаній, які працюють на ринку монополістичної конкуренції.

Розглянемо портфель, який містить наступні активи: акції компаній META, GOOGLE, TESLA, NVIDIA, тому ми можемо представити цей портфель у вигляді вектора:

$$X = [\text{META}, \text{GOOGLE}, \text{TESLA}, \text{NVIDIA}]$$

Звичайно, після обчислення лог-дохідності кожного активу в портфелі, наступним кроком є побудова коваріаційної матриці для відображення взаємозв'язку між цими активами. У мові Python бібліотека NumPy надає зручну функцію для розрахунку коваріаційної матриці, яку часто називають коваріаційною матрицею дохідностей. Результат представлено в Таблиці 2.

Таблиця 2. Коваріаційна таблиця для портфеля

	META	GOOGLE	TESLA	NVIDIA
META	0.000788	0.000369	0.000386	0.000499
GOOGLE	0.000369	0.000396	0.000332	0.000423
TESLA	0.000386	0.000332	0.001674	0.000648
NVIDIA	0.000499	0.000423	0.000648	0.001095

Джерело: побудовано авторами на основі даних[14]

Спостережувана тенденція до постійного зменшення значень у коваріаційній матриці відповідає критеріям, визначеним для Портфеля В, де стратегічний акцент робиться на підтримці кореляцій нижче визначеного порогу.

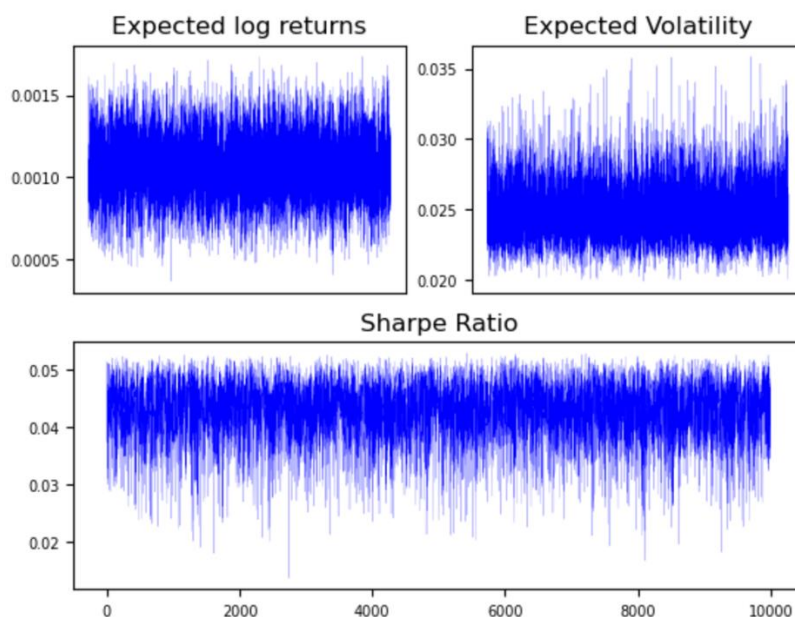


Рис. 1. Очікувана логарифмічна доходність, волатильність та коефіцієнт Шарпа для портфеля

Джерело: побудовано авторами на основі даних

Коваріаційна матриця необхідна для знаходження портфеля з максимальним значенням критерію Шарпа. Для розв'язання цієї задачі необхідно дослідити різноманітний масив портфелів, кожен з яких характеризується різними ваговими коефіцієнтами, присвоєними окремим

активам. Метод Монте-Карло виявляється підходящим підходом для цієї мети. У цьому випадку модель навчається на 10 000 вибірках псевдовипадкових ваг, використовуючи матричну мову для оптимізації обчислювальних процесів. Подальше графічне представлення охоплює очікувану лог-прибутковість, волатильність та коефіцієнт Шарпа, забезпечуючи таким чином комплексну візуалізацію характеристик портфеля.

Реалізуючи функцію максимізації для вектора коефіцієнта Шарпа, який містить значення коефіцієнта Шарпа, отримані з 10 000 вибірок псевдовипадкових ваг, визначено оптимальний портфель. Складається з вагових коефіцієнтів

$$w = [3.37092212 \cdot 10^{-4}, 5.262 \cdot 10^{-2}, 3.47615658 \cdot 10^{-1}, 5.99427250 \cdot 10^{-1}]$$

Цей портфель вирізняється оптимальною доходністю, скоригованою на ризик, що притаманна відповідним активам. Як бачимо, більша частина портфеля складається з акцій Tesla та Nvidia. Середньоденна дохідність цього портфеля становить +1.6%. Крім того, було побудовано ілюстративне представлення кривої "дохідність-ризик", що охоплює всі відібрані портфелі для всебічної візуалізації та аналізу (рис. 2).

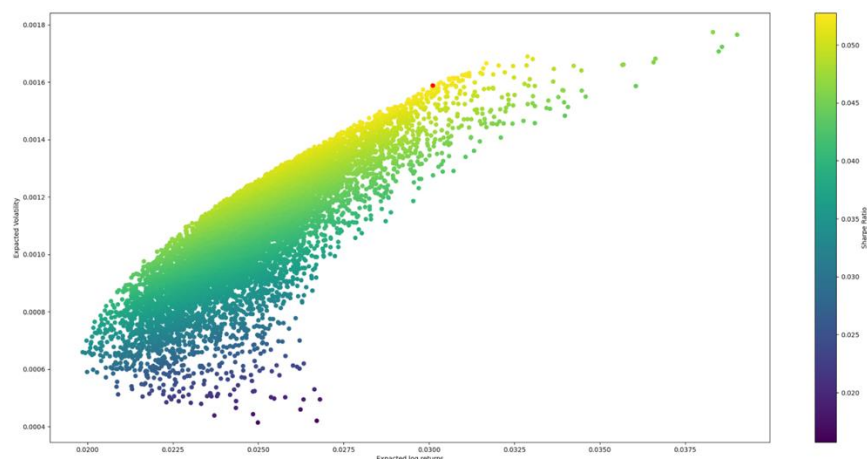


Рис. 2. Крива прибутковості-ризик

Джерело: побудовано авторами на основі даних

Використовуючи матричну нотацію, яка була введена вище, перепишемо оптимізаційну задачу (1):

$$\begin{array}{ll} \min_{\omega} & -\frac{w^T \log(r)}{\sqrt{w^T \Sigma w}} \\ \text{S. T} & \omega_i \geq 0 \\ & \sum w_i = 1 \end{array}$$

Перейдемо до нових позначень, матрицю-вектор частот активів у портфелі w позначимо як X , коваріаційну матрицю Σ позначимо, як S . Відповідно змінимо позначення матриці-вектору дохідності активів на P та загальної дохідності портфеля на π .

Отримуємо наступну задачу оптимізації:

$$\begin{cases} \sigma^2(P) = X^T \cdot S \cdot X \rightarrow \min \\ X^T \cdot P = \pi \\ X^T \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

Як ми можемо бачити це є задачею знаходження умовного екстремуму. Для знаходження її розв'язку знайдемо функцію Лагранжа, маємо [15]:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \frac{1}{2} X \cdot S \cdot X^T - \lambda_1 (X^T \cdot P - \pi) - (1^T \cdot X - 1)$$

Розв'язуючи за X , отримуємо оптимальний вектор часток активів у портфелі, що мінімізує волатильність портфелю за вказаною віддачою:

$$X = S^{-1} [1, P] I^{-1} \begin{bmatrix} \pi \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для спрощення ми можемо чітко виразити елементи в інформаційній матриці та визначити їх наступним чином:

$$I = \begin{bmatrix} P^T S P & P^T S^{-1} 1 \\ 1^T S^{-1} P & 1^T S^{-1} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

Якщо ми підставимо значення з інформаційної матриці в рівняння для знаходження оптимального портфеля, ми отримаємо оперативну формулу:

$$X = \frac{1}{\det I} S^{-1} (C P - B) \pi + \frac{S^{-1} 1}{\det I} (A - B P)$$

Волатильність (дисперсія) портфелю визначається наступним чином:

$$\sigma_p^2 = [\pi, 1] I^{-1} \begin{bmatrix} \pi \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det I} (A - 2B\pi + C\pi^2)$$

Можливо, маючи матрицю даних D побудувати портфель, що має мінімальну волатильність серед усіх можливих портфельів з цих активів. Мінімальна дисперсія задається так:

$$\sigma_{gm}^2 = \frac{1}{C} = \frac{1}{1^T S^{-1} 1}$$

Прибутковість портфелю, що визначається математичним очікуванням за заданої дисперсії визначається як:

$$\pi_{gm} = \frac{B}{C} = \frac{1^T S^{-1} P}{1^T S^{-1} 1}$$

Частки активів, що визначають портфель з глобальним мінімумом функції дисперсії задається наступним чином:

$$X_{gm} = \frac{S^{-1} 1}{1^T S^{-1} 1} = \frac{S^{-1} 1}{C}$$

Здійснення аналітичного пошуку та виведення повного рішення задачі у загальному форматі надає значні переваги порівняно з іншими методами розв'язання, такими як метод Монте-Карло. Технічні обмеження сучасних обчислювальних систем роблять неможливим ідеальне тестування на базі моделі Монте-Карло, особливо в контексті відсутності адекватних випадкових вибірок, що може суттєво впливати на точність та надійність розрахунків [13].

Варто також зазначити, що загальне визначення ефективної границі, розв'язуючи задачу оптимізації, потребує серйозних математичних розрахунків та значних обчислювальних ресурсів. Однак використання можливостей мови Python полегшує реалізацію ефективного розв'язку [14]. Наступний код призначений для знаходження ефективної границі:

```

returns = np.linspace(0,0.0018,1000)
Volatility_opt = [].

def minimizeMyVolatility(w):
    w = np.array(w)
    V = np.sqrt(np.dot(w.T,np.dot(Sigma,w)))
    повернути V

def getReturn(w):
    w = np.array(w)
    R = np.sum(meanLogRet*w)
    return R

для R у відповідях:
    # знайдіть найкращу волатильність
    constraints = ({'type':'eq','fun':checkSumToOne},
                   {'type':'eq' , 'fun': lambda w: getReturn (w) - R})
    opt = minimize(minimizeMyVolatility, w0, method = 'SLSQP', bounds =
bounds, constraints = constraints)
    # зберегти оптимальну волатильність
    Volatility_opt.append(opt['fun'])

```

Цей підхід на основі Python спрощує складні обчислення, необхідні для ефективного граничного аналізу, роблячи його доступним і можливим для практичної реалізації.

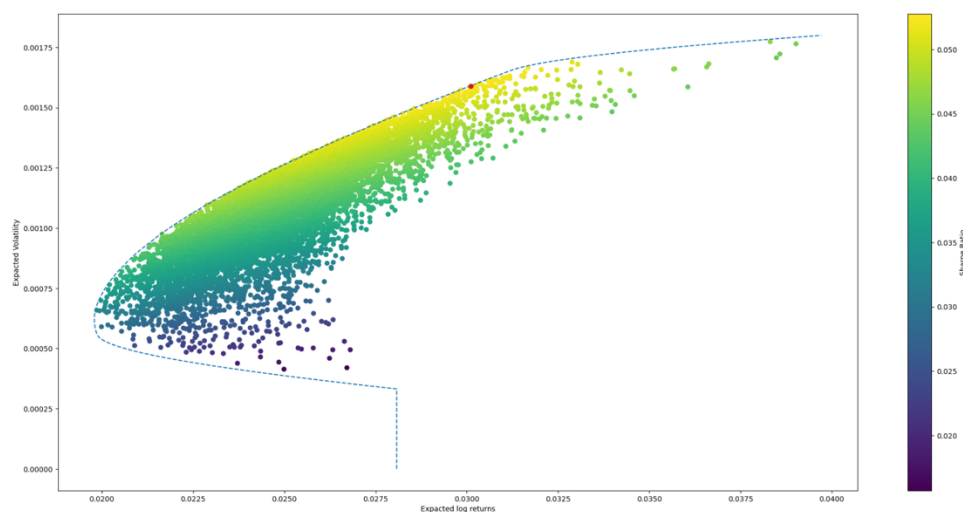


Рис. 3. Ефективна границя Марковіца.

Джерело: побудовано авторами на основі даних

Емпіричне спостереження показує, що отримане значення знаходиться на ефективній границі, що вказує на придатність та ефективність нашого методу, який використовує метод Монте-Карло в своїй реалізації.

Висновок. Отже нами було детально розглянуто різноманітні методи оптимізації інвестиційного портфеля, які включають як класичні підходи, так і сучасні математичні техніки. Кожен з цих методів має свої унікальні переваги та обмеження, що вказує на важливість глибокого розуміння різних аспектів портфельного управління. Зокрема, було зосереджено увагу на таких поняттях, як нижні часткові моменти, Value-at-Risk, умовна вартість ризику, максимізація очікуваної корисності та стохастичне домінування. Особливої частини роботи займала розробка модифікованої моделі ефективного портфеля Марковіца, яка є фундаментальною для сучасного управління інвестиційним портфелем. Особлива увага приділена програмному рішенню, що дозволяє автономно знаходити найбільш прибутковий портфель, враховуючи ризик. Таке програмне рішення значно спрощує процес оптимізації портфеля, дозволяючи інвесторам ефективно управляти своїми активами в умовах постійної зміни ринкових умов. Завдяки цьому підходу, інвестори можуть зосередитись на стратегічному плануванні та прийнятті виважених рішень, в той час як технічна частина процесу оптимізації виконується автоматизовано.

Література

1. Jobson, J. David, and Bob Korkie. "Estimation for Markowitz efficient portfolios." *Journal of the American Statistical Association* 75.371 (1980): 544-554.
2. Konno, H., & Koshizuka, T. (2005). Mean-absolute deviation model. *Iie Transactions*, 37(10), 893-900.
3. Unser, M. (2000). Lower partial moments as measures of perceived risk: An experimental study. *Journal of Economic Psychology*, 21(3), 253-280.
4. Jorion, P. (1996). Risk2: Measuring the risk in value at risk. *Financial analysts journal*, 52(6), 47-56.

5. Levy, H. (2015). *Stochastic dominance: Investment decision making under uncertainty*. Springer.
6. Platen, E., & Heath, D. (2006). *A benchmark approach to quantitative finance*. Springer Science & Business Media.
7. Stefanica, D. (2014). *A linear algebra primer for financial engineering*. FE Press, 946, 947.
8. Gilli, M., Maringer, D., & Schumann, E. (2019). *Numerical methods and optimization in finance*. Academic Press.
9. Blum, L., Blum, M., & Shub, M. (1986). A simple unpredictable pseudo-random number generator. *SIAM Journal on computing*, 15(2), 364-383.
10. Hansen, L. K., & Svejvig, P. (2022). Seven decades of project portfolio management research (1950–2019) and perspectives for the future. *Project Management Journal*, 53(3), 277-294.
11. Kevin, S. (2022). *Security analysis and portfolio management*. PHI Learning Pvt. Ltd..
12. Wu, Q., Liu, X., Qin, J., Zhou, L., Mardani, A., & Deveci, M. (2022). An integrated multi-criteria decision-making and multi-objective optimization model for socially responsible portfolio selection. *Technological Forecasting and Social Change*, 184, 121977.
13. Mba, J. C., Ababio, K. A., & Agyei, S. K. (2022). Markowitz mean-variance portfolio selection and optimization under a behavioral spectacle: New empirical evidence. *International Journal of Financial Studies*, 10(2), 28.
14. Chong, E. K., Lu, W. S., & Žak, S. H. (2023). *An Introduction to Optimization: With Applications to Machine Learning*. John Wiley & Sons.

References

1. Jobson, J. D. and Korkie, B. (1980), "Estimation for Markowitz efficient portfolios", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 75.371, pp.544-554.
2. Konno, H. and Koshizuka, T. (2005), "Mean-absolute deviation model", *Iie Transactions*, 37(10), pp.893-900.
3. Unser, M. (2000), "Lower partial moments as measures of perceived risk: An experimental study", *Journal of Economic Psychology*, vol. 21(3), pp.253-280.

4. Jorion, P. (1996), "Risk2: Measuring the risk in value at risk", *Financial analysts journal*, vol. 52(6), pp.47-56.
5. Levy, H. (2015), *Stochastic dominance: Investment decision making under uncertainty*, Springer, Berlin/Heidelberg, Germany.
6. Platen, E., & Heath, D. (2006). *A benchmark approach to quantitative finance*. Springer Science & Business Media, Berlin/Heidelberg, Germany.
7. Stefanica, D. (2014), *A linear algebra primer for financial engineering*, FE Press, NY, USA, pp.946-947.
8. Gilli, M., Maringer, D., and Schumann, E. (2019), *Numerical methods and optimization in finance*, Academic Press, Cambridge, USA.
9. Blum, L., Blum, M., and Shub, M. (1986), "A simple unpredictable pseudo-random number generator", *SIAM Journal on computing*, vol. 15(2), pp.364-383.
10. Hansen, L. K. and Svejvig, P. (2022), "Seven decades of project portfolio management research (1950–2019) and perspectives for the future", *Project Management Journal*, vol. 53(3), pp.277-294.
11. Kevin, S. (2022), *Security analysis and portfolio management*, PHI Learning Pvt. Ltd, Delhi, India.
12. Wu, Q., Liu, X., Qin, J., Zhou, L., Mardani, A., and Deveci, M. (2022), "An integrated multi-criteria decision-making and multi-objective optimization model for socially responsible portfolio selection", *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 184, 121977.
13. Mba, J. C., Ababio, K. A., and Agyei, S. K. (2022), "Markowitz mean-variance portfolio selection and optimization under a behavioral spectacle: New empirical evidence", *International Journal of Financial Studies*, vol. 10(2), pp.28.
14. Chong, E. K., Lu, W. S., and Žak, S. H. (2023), *An Introduction to Optimization: With Applications to Machine Learning*, John Wiley & Sons, Hoboken, USA.

Стаття надійшла до редакції 03.05.2024 р.