

Електронний журнал «Ефективна економіка» включено до переліку наукових фахових видань України з питань економіки (Категорія «Б», Наказ Міністерства освіти і науки України № 975 від 11.07.2019). Спеціальності – 051, 071, 072, 073, 075, 076, 292. Ефективна економіка. 2025. № 12.

DOI: <http://doi.org/10.32702/2307-2105.2025.12.114>

УДК 330.34

О. В. Гайдучок,

к. е. н., доцент, доцент кафедри прикладної математики,

Національний університет «Львівська політехніка»

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-0040-4307>

Ю. Р. Гайдучок,

аспірант, Національний університет «Львівська політехніка»

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0001-6335-3474>

ОЛІГОПОЛІЯ КУРНО-БЕРТРАНА З ДИНАМІЧНИМИ СТРАТЕГІЯМИ АДАПТАЦІЇ

O. Gaiduchok,

PhD in Economics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, National University “Lviv Polytechnic”

Yu. Gaiduchok,

Post-graduate student, National University “Lviv Polytechnic”

COURNOT–BERTRAND OLIGOPOLY WITH DYNAMIC ADAPTIVE STRATEGIES

У статті досліджується ринок з обмеженою кількістю фірм (олігополія), які використовують динамічні адаптивні стратегії в умовах конкуренції Курно-Бертрана з диференційованими продуктами. Розглянуто

випадок, коли кілька фірм обирають обсяг виробництва (поведінка Курно), а кілька — ціну (поведінка Бертрана), що відображає гібридну структуру ринку. Запропоновано систему диференціальних рівнянь, що описує динаміку адаптації стратегій кожного агента з урахуванням їхніх реакцій на зміну ринкового середовища. Проведено аналіз рівноваги та досліджено її стійкість за допомогою лінеаризації системи диференціальних рівнянь біля точки рівноваги та матриці Якобі. Отримані результати можуть бути використані для моделювання економічної поведінки, стратегічного планування, аналізу стабільності ринку та розробки механізмів регуляторного впливу в умовах конкуренції між інтелектуальними агентами з різними стратегічними підходами.

Real-world markets rarely fit purely Cournot or Bertrand models, necessitating hybrid dynamic approaches. Analyzing the dynamics of mixed strategic competition is crucial for understanding modern, evolving market structures. The paper investigates a market with a limited number of firms (oligopoly) that employ dynamic adaptive strategies under Cournot-Bertrand competition with differentiated products. A case is considered where some firms choose production quantities (Cournot behavior) and others set prices (Bertrand behavior), reflecting a hybrid market structure. A system of differential equations is proposed to describe the dynamics of strategy adaptation by each agent, accounting for their responses to changing market conditions. The methodological approach begins with specifying the profit functions for Cournot firms and Bertrand firms, taking into account product differentiation where demand and price functions depend on the aggregate strategic choices of all market participants. The core of the dynamic modeling involves formulating a system of autonomous differential equations based on the principle of gradient adjustment. It is assumed that the rate of change of a firm's strategy over time is directly proportional to the marginal profit with respect to that strategy, scaled by specific positive adaptation reflecting the individual speed of reaction to profit

opportunities. The steady-state equilibrium of this dynamic system is identified by solving the simultaneous system of first-order conditions characterizing the static Nash-Cournot-Bertrand equilibrium. To investigate local asymptotic stability, the complex nonlinear dynamical system is linearized near determined equilibrium point. This process involves constructing the Jacobian matrix of the system, whose elements consist of the cross-partial and second-order partial derivatives of the profit functions evaluated at the equilibrium.

The obtained results can be applied to modeling economic behavior, strategic planning, market stability analysis, and the development of regulatory mechanisms under competition between intelligent agents with different strategic approaches.

Ключові слова: *олігополія Курно-Бертрана, градієнтна динаміка, стійкість, рівновага, адаптивні стратегії, матриця Якобі.*

Keywords: *Cournot-Bertrand oligopoly, gradient dynamics, stability, equilibrium, adaptive strategies, Jacobian matrix.*

Постановка проблеми. У класичних теоріях Курно-Бертрана спостереження показали, що в умовах невизначеного попиту стратегія поширення інформації стає домінантною для Курно-фірм, тоді як для агентів із типом реагування Бертран цей ефект змінюється залежно від інтенсивності конкуренції. Тому важливим є оцінка динаміки адаптації: висока швидкість реагування може призвести до біфуркацій, осциляцій або хаосу, особливо у системах із великою кількістю гравців. Також, у сучасних ринках із низькою маржинальністю Бертран-конкуренція часто веде до цінового утворення на рівні граничних витрат і тимчасової нестабільності. Водночас моделі Курно залежать від обсягів виробництва і реагують на масштаб глобального попиту — що є критично як для традиційних галузей, так і для цифрової економіки з мережевими ефектами.

Сучасні ринки все більше функціонують у гібридному режимі Курно-Бертрана, де динамічні стратегії адаптації формують ціни і обсяги в режимі

реального часу. Без спеціалізованого аналізу, розуміння стабільності математичних умов та функціональних параметрів, ці моделі не здатні адекватно передбачити ризики, включаючи алгоритмічну похибку, ринкову нестабільність і ефективність регулювання. Економічна актуальність цієї проблематики критично зростає в умовах цифрової трансформації економіки, коли стратегічні рішення про ціноутворення та обсяги поставок дедалі частіше делегуються автоматизованим системам та алгоритмам машинного навчання. У такому високодинамічному середовищі, характерному для електронної комерції, фінансових ринків та платформених економік, традиційні статичні моделі олігополії остаточно втрачають свою пояснювальну та прогностичну силу.

Ігнорування складної динаміки змішаної конкуренції може мати серйозні макро- та мікроекономічні наслідки. З одного боку, це загрожує ендогенно зумовленою волатильністю ринків, коли цінові шоки виникають не через зміну фундаментальних факторів попиту чи пропозиції, а внаслідок внутрішньої нестійкості алгоритмічних взаємодій (наприклад, "flash crashes"). З іншого боку, виникають нові виклики для конкурентної політики: гібридна структура ринку може сприяти виникненню специфічних форм координації або "мовчазної змови" між інтелектуальними агентами, що веде до втрат суспільного добробуту та неефективного розподілу ресурсів. Відтак, розробка адекватного математичного інструментарію для аналізу стійкості таких систем стає не просто теоретичною задачею, а необхідною передумовою для забезпечення стабільного економічного зростання та формування ефективних механізмів державного регулювання в епоху цифрової економіки.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Ключовим вектором досліджень, що об'єднує дані нові публікації, джерела, є перехід від статичного аналізу рівноваги до вивчення динамічних процесів, проблем стійкості та виникнення складних режимів поведінки в моделях типу Курно.

Базою для побудови специфічних ринкових моделей є загальні підходи до математичного опису економічних потоків та регулювання. У колективній монографії за ред. П. П. Костробія [1] викладено фундаментальні математичні моделі, що застосовуються для аналізу та регулювання фінансових потоків. Ця праця створює необхідне теоретичне підґрунтя для розуміння того, як математичний апарат може бути використаний для опису еволюції економічних систем у часі. Сучасний погляд на загальне моделювання динамічної конкуренції Курно на олігополістичному ринку представлено також у роботі Z. Lian та J. Zheng (2021) [5], що свідчить про актуальність розробки нових підходів у цій класичній сфері.

Центральною проблемою динамічних моделей олігополії є питання стійкості точки рівноваги Неша-Курно. Класичною в цьому напрямі є робота видатного економіста Т. Пу (T. Pu, 2007) [3], в якій детально досліджується залежність стійкості рівноваги Курно від збільшення кількості конкурентів на ринку. Пу демонструє, що зростання числа фірм може призводити до втрати стійкості та виникнення хаотичної динаміки. Розвиваючи цей напрям, науковці Н. Л. Івашук, Б. В. Гнатів та І. І. Кавалець [6] здійснили побудову узагальненої моделі олігополії "Курно-Пу". Їхнє дослідження фокусується на аналізі стійкості точки рівноваги в цій узагальненій моделі, що дозволяє глибше зрозуміти умови функціонування ринків з різною кількістю учасників та різними характеристиками попиту і витрат.

Дослідження показують, що відмова від спрощених припущень веде до виявлення значно складнішої поведінки ринку, ніж проста збіжність до рівноваги. Праця H.N. Agiza та співавторів (1999) [2] присвячена аналізу динамічної гри Курно з трьома олігополістами. Автори виявили явище багатостайності (multistability), коли в системі співіснують декілька атракторів (станів рівноваги або циклів), і кінцевий стан ринку залежить від початкових умов. Додатковим фактором ускладнення динаміки є використання фірмами різних (гетерогенних) стратегій поведінки. Це питання досліджує A. Elsadany (2014) [4] на прикладі моделі динамічної

дуополії Курно. Врахування того факту, що різні гравці можуть використовувати різні правила прийняття рішень (наприклад, один — обмежено раціональний, інший — адаптивний), суттєво змінює динамічні властивості системи та умови її стійкості.

Зазначені праці формують теоретичну базу для подальшого вивчення механізмів адаптації фірм в умовах конкуренції та прогнозування еволюції ринкових структур.

Метою статті є аналіз моделей олігополії з урахуванням динамічних стратегій адаптації учасників ринку. Зокрема, дослідити вплив адаптивної поведінки фірм на стабільність і динаміку ринкових рівноваг, розробити математичні моделі, які описують еволюцію стратегій в умовах конкуренції.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо розширення традиційної моделі Курно для випадку, де скінченна кількість фірм конкурують на ринку одночасно. Вважаємо, що продукція є диференційованою, тобто попит на продукцію кожної фірми залежить як від її власної ціни/обсягу, так і від параметрів конкурентів. Розглянемо два типи фірм – частина визначає свою поведінку за стратегією Курно, а частина за стратегією Бертрана. Стратегія Курно — це підхід до моделювання поведінки фірм в умовах олігополії, при якому кожна фірма приймає рішення щодо обсягу виробництва, виходячи з припущення, що обсяги виробництва конкурентів є фіксованими. Основним припущенням моделі є те, що ціна встановлюється як функція загального обсягу пропозиції на ринку. Таким чином, кожна фірма максимізує свій прибуток, враховуючи вплив власного обсягу на ринкову ціну. Стратегія Бертрана— це підхід, за якого фірми в умовах олігополії конкурують, обираючи ціну своєї продукції, виходячи з припущення, що ціни конкурентів залишаються незмінними. Попит у кожної фірми залежить від встановленої нею ціни відносно цін конкурентів. У класичній моделі з однорідним продуктом така конкуренція веде до ціни, що дорівнює граничним витратам, але в умовах диференційованого продукту може існувати ненульовий

прибуток. У цьому випадку стратегічною змінною є ціна, а попит залежить від цін усіх фірм.

Нехай попит описується лінійною функцією, яка враховує залежність між власною ціною і обсягів виробництва інших фірм. Для k_1 фірм, які обирають поведінку Курно (обирають q_i , отримують p_i),

$$p_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{k_1} \beta_{ij} q_j - \sum_{l=1}^{k_2} \gamma_{il} q_l^{(B)}$$

та для k_2 фірм, які обирають поведінку Бертрана (обирають p , отримують q_i)

$$q_i = \theta_i - \sum_{j=1}^{k_2} \mu_{ij} p_j - \sum_{l=1}^{k_1} \eta_{il} p_l^{(C)}$$

де α_i, θ_i — параметри ціни та виробництва, β, γ, η, μ коефіцієнти, що визначають ступінь взаємозамінності між продуктами різних фірм, q_j обсяги виробництва, p_j — ціна одиниці продукції.

Прибуток кожної фірми визначається як різниця між доходом та витратами. Запишемо, як визначається прибуток для обох типів фірм.

Для фірм типу Курно $i = 1, \dots, k_1$

$$\Pi_i = p_i(q_1, q_2, \dots, q_{k_1}, q_{k_2}^{(B)})q_i - C_i(q_i).$$

Для фірм типу Бертрана $j = 1, \dots, k_2$

$$\Pi_j = (p_j - c_j)q_j(p_1, p_2, \dots, p_{k_2}, p_{k_1}^{(C)})$$

Задача кожної фірми — максимізувати свій прибуток щодо своєї стратегії, враховуючи стратегії інших фірм. Якщо стратегія є динамічною, то швидкість змін стратегій фірм можна описати за допомогою диференціальних рівнянь

Для фірм типу Курно

$$\frac{dq_i}{dt} = \xi_i \frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i}$$

Для фірм типу Бертрана

$$\frac{dp_i}{dt} = \eta_i \frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i}$$

де ξ, η_i – коефіцієнт адаптації для фірми i .

Стратегії фірм змінюються пропорційно граничному прибутку. Рівновага настає тоді, коли швидкості цих змін дорівнюють нулю

$$\frac{dq_i}{dt} = 0, \frac{dp_i}{dt} = 0.$$

Тут умова нульової швидкості зміни означає, що частинні похідні функцій прибутку за відповідними стратегіями мають дорівнювати нулю, оскільки коефіцієнти адаптації є додатніми. Розв'язання отриманої системи $k_1 + k_2$ алгебраїчних рівнянь дає координати точки рівноваги як набору стратегій

$$\frac{\partial \left(p_i(q_1, q_2, \dots, q_{k_1}, q_{k_2}^{(B)}) q_i - C_i(q_i) \right)}{\partial q_i} = 0, i = 1, \dots, k_1$$

$$\frac{\partial \left((p_j - c_j) q_j (p_1, p_2, \dots, p_{k_2}, p_{k_1}^{(C)}) \right)}{\partial p_j} = 0, j = 1, \dots, k_2$$

Для дослідження рівноваги потрібно провести аналіз власних значень матриці Якобі, яка складається з частинних похідних диференціальних рівнянь по відношенню до всіх змінних стану (стратегій фірм). У нашому випадку матрицю Якобі можна умовно розділити на чотири блоки, що відображають взаємний вплив різних типів фірм:

$$J = \begin{pmatrix} \text{Блок Курно-Курно} & \text{Блок Курно-Бертран} \\ \text{Блок Бертран-Курно} & \text{Блок Бертран-Бертран} \end{pmatrix}$$

1. Блок Курно-Курно (верхній лівий) показує, як зміна обсягу випуску однієї фірми Курно впливає на швидкість зміни обсягу іншої фірми Курно.
2. Блок Курно-Бертран (верхній правий) показує, як зміна ціни фірми Бертрана впливає на швидкість зміни обсягу фірми Курно. Цей вплив

існує, оскільки ціна у функції прибутку фірми Курно залежить від стратегій усіх фірм, включаючи фірми Бертрана).

3. Блок Бертран-Курно (нижній лівий) показує, як зміна обсягу фірми Курно впливає на швидкість зміни ціни фірми Бертрана. Цей вплив існує, оскільки попит у функції прибутку фірми Бертрана залежить від стратегій усіх фірм, включаючи фірми Курно.
4. Блок Бертран-Бертран (нижній правий) показує, як зміна ціни однієї фірми Бертрана впливає на швидкість зміни ціни іншої фірми Бертрана.

Після концептуального розділення матриці Якобі на функціональні блоки, що відображають внутрішньовидову та міжвидову стратегічну взаємодію, необхідно перейти до формалізації цих блоків та безпосереднього аналізу стійкості.

Отримана на попередньому етапі матриця містить символічні вирази, які залежать від поточних значень стратегій. Для аналізу стійкості конкретної точки рівноваги Неша, необхідно обчислити значення всіх елементів матриці Якобі саме в цій точці. Ця матриця описує лінеаризовану систему динамічних рівнянь у малому околі точки рівноваги.

Далі можна виділити такі типи стійкості згідно з теорією стійкості динамічних систем (перший метод Ляпунова):

1. Асимптотична стійкість: Якщо всі знайдені власні значення мають строго від'ємні дійсні частини, то точка рівноваги є асимптотично стійкою. Економічно це означає, що при будь-якому малому відхиленні від рівноваги (наприклад, внаслідок тимчасового шоку попиту), ринок з часом самостійно повернеться до початкового рівноважного стану за рахунок адаптивних дій фірм.
2. Нестійкість: Якщо хоча б одне власне значення має додатну дійсну частину, рівновага є нестійкою. Найменше відхилення призведе до того, що стратегії фірм будуть все далі віддалятися від рівноважних

значень, що може призвести до значних коливань на ринку або переходу до іншого стану.

3. Критичний випадок: Якщо дійсні частини деяких власних значень дорівнюють нулю, а інші від'ємні, лінійне наближення не дає однозначної відповіді про стійкість, і потрібен аналіз вищих порядків (хоча в економічних моделях такого типу це часто свідчить про наявність циклічних коливань або біфуркацій).

Розглянемо найпростіший випадок змішаної олігополії, щоб проілюструвати структуру матриці. Нехай на ринку діють лише дві фірми:

- * Фірма 1: поводить ся як фірма Курно, обирає обсяг q_1 . Швидкість адаптації ξ_1 .

- * Фірма 2: поводить ся як фірма Бертрана, обирає ціну p_2 . Швидкість адаптації η_2 .

Вектор стану системи: $X = \begin{pmatrix} q_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$. Матриця Якобі матиме розмірність 2x2 і наступну структуру, що відповідає описаним вище блокам:

1. Діагональні елементи (Блоки КК та ВВ):

Цей елемент відображає "власну" стійкість фірми Курно. Згідно з умовами другого порядку для максимізації прибутку, друга похідна має бути від'ємною в точці рівноваги (увігнутість функції прибутку). Оскільки $\xi_1 > 0$, то $J_{11} < 0$. Це створює стабілізуючий ефект: якщо фірма виробила забагато, граничний прибуток стає від'ємним, і динамічне рівняння змушує її зменшувати випуск.

Аналогічно для фірми Бертрана, цей елемент J_{22} зазвичай від'ємний, що відображає спадну віддачу від підвищення ціни понад оптимальний рівень.

2. Недіагональні елементи (Блоки КВ та ВК):

Ці елементи визначають характер стратегічної взаємодії і є критичними для загальної стійкості системи. J_{12} показує, як зміна ціни фірми Бертрана впливає на граничний прибуток фірми Курно.

Якщо товари є субститутами, підвищення ціни p_2 зазвичай збільшує попит на товар фірми 1, підвищуючи її граничний прибуток. У цьому випадку змішана похідна додатна.

J_{21} показує, як збільшення випуску фірми Курно впливає на граничний прибуток фірми Бертрана. Збільшення q_1 може знизити залишковий попит для фірми 2 або зробити його більш еластичним, що вплине на оптимальну ціну.

Важливо відзначити роль параметрів ξ_1 та η_2 . Вони виступають мультиплікаторами в кожному елементі матриці. Навіть якщо знаки других похідних сприяють стійкості, надто високі значення швидкостей адаптації (надмірно реактивна поведінка фірм) можуть призвести до збільшення абсолютних значень елементів матриці Якобі. Це, в свою чергу, може призвести до появи власних значень з додатними дійсними частинами або великими уявними частинами, що означатиме втрату стійкості або виникнення ринкових коливань з наростаючою амплітудою.

Висновки. У статті побудовано математичну модель олігополістичного ринку, де фірми застосовують динамічні адаптивні стратегії типу Курно та Бертрана. Стратегія Курно відображає конкуренцію за обсяги, тоді як стратегія Бертрана — конкуренцію за ціни. Обидва підходи є фундаментальними для аналізу стратегічної взаємодії в олігополістичних ринках і мають численні розширення, зокрема для випадків з диференційованим попитом, адаптивною поведінкою та динамічною конкуренцією. Отримано систему диференціальних рівнянь, що описує взаємодію між фірмами з різною поведінкою. Аналіз матриці Якобі дозволяє пов'язати фундаментальні характеристики ринку (форму функцій попиту та витрат, що визначають другі похідні) та поведінкові характеристики фірм (швидкість прийняття рішень) з умовами загальної стабільності ринкової рівноваги.

Результати показали, що така модель дозволяє відображати складну стратегічну взаємодію між агентами та може бути використана для прогнозування поведінки ринку.

Література

1. Костробій, П.П. та ін. (2012), “Математичні моделі регулювання фінансових потоків”, Растр-7 (Національний університет "Львівська політехніка"), 132 с.
2. Agiza, H.N., Bischi, G.I. та Kopel, M. (1999), “Multistability in a dynamic Cournot Game with Three Oligopolists”, *Mathematics and Computers in Simulation*, T. 51, № 1-2, С. 63-90.
3. Puu, T. (2007), “On the Stability of Cournot Equilibrium when the Number of Competitors Increases”, *Journal of Economic Behavior & Organization*, T. 62, № 3, С. 337-349.
4. Elsadany, A. (2014), “A dynamic Cournot duopoly model with different strategies”, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, T. 22, № 1, С. 113-118.
5. Lian, Z. та Zheng, J. (2021), “A Dynamic Model of Cournot Competition for an Oligopolistic Market”, *Mathematics*, T. 9, № 5, С. 489.
6. Іващук, Н.Л., Гнатів, Б.В. та Кавалець, І.І. (2013), “Побудова узагальненої моделі олігополії Курно-Пу та дослідження стійкості її точки рівноваги”, *Журнал обчислювальної та прикладної математики*, № 2 (112), С. 94-104.

References

1. Kostrobij, P.P. et al. (2012), *Matematychni modeli rehuliuвання finansovykh potokiv* [Mathematical models of financial flow regulation], Lviv Polytechnic National University. Rastr-7, Lviv, Ukraine.

2. Agiza, H.N. Bischi, G.I. and Kopel, M. (1999), "Multistability in a dynamic Cournot Game with Three Oligopolists", Mathematics and Computers in Simulation, vol. 51, no. 1-2, pp. 63-90.
3. Puu, T. (2007), "On the Stability of Cournot Equilibrium when the Number of Competitors Increases", Journal of Economic Behavior & Organization, vol. 62, no. 3, pp. 337-349.
4. Elsadany, A. (2014), "A dynamic Cournot duopoly model with different strategies", Journal of the Egyptian Mathematical Society, vol. 22, no. 1, pp. 113-118.
5. Lian, Z. and Zheng, J. (2021), "A Dynamic Model of Cournot Competition for an Oligopolistic Market", Mathematics, vol. 9, no. 5, pp. 489.
6. Ivashchuk, N.L. Hnativ, B.V. and Kavalets, I.I. (2013), "Construction of a generalized Cournot-Puu oligopoly model and investigation of the stability of its equilibrium point", Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 2 (112), pp. 94-104.

Стаття надійшла до редакції 11.12.2025 р.